5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Научная командировка.

Учёный Иннокентий Иванов получил приглашение выступить с докладом на научной конференции в г. Томск. Он вылетел из Москвы в 9:10 и приземлился в Томске в 17:45. Через несколько дней учёный отправился домой. Он вылетел из Томска в 7:25 и приземлился в Москве в 8:00. Как долго самолёт летел из одного города в другой? Время полёта туда и обратно одинаково. Моменты взлёта и посадки самолёта указаны по **местному** времени.

Ответ: 4 ч 35 мин.

Решение: Пусть томское время отличается на t от московского. Тогда истинное время T полёта самолёта составляет

$$T = 17\!:\!45 - 9\!:\!10 - t = 8 \text{ ч } 35 \text{ мин} - t \quad \text{(Москва-Томск)},$$

$$T = 8\!:\!00 - 7\!:\!25 + t = 35 \text{ мин} + t \quad \text{(Томск-Москва)}.$$

Из полученных выражений находим, что

$$T = \frac{1}{2}\left((8 \text{ ч } 35 \text{ мин} - t) + (35 \text{ мин} + t)\right) = 4 \text{ ч } 35 \text{ мин}.$$

Критерии:

Учёт разницы во времени между городами . . . . 3 балла
Выражения для времени полёта туда и обратно . . . . 4 балла
Найдено время полёта . . . . 3 балла

Задача 7.2.(6.2) Я случайно!

Учёный Иннокентий Иванов, находясь в экспедиции, сделал фотографию ранее неизвестного науке животного. Разбирая материалы экспедиции, лаборант учёного случайно пролил на фотографию кофе (рис. 7.1). В результате часть фотографии оказалась испорченной. Определите длину изображённого на фотографии животного.

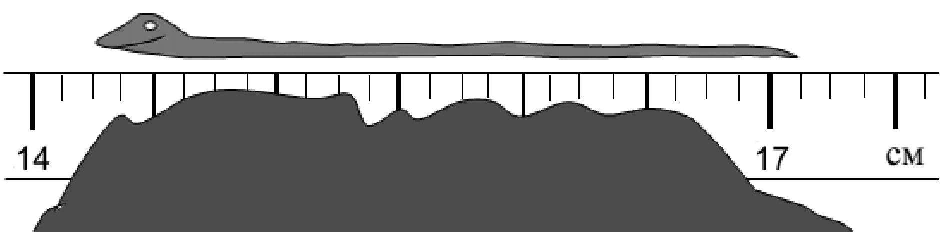

Рис. 7.1.

Ответ: 2,875 см.

Решение: Между отметками, соответствующими 14 и 17 см расположены 24 деления. Следовательно, одно деление соответствует 1/8 см. Животное на фотографии имеет длину, равную 23 делениям или 23/8 = 2,875 см.

Критерии:

Определение цены деления линейки . . . . 4 балла
Нахождение длины в делениях . . . . 3 балла
Нахождение длины в см . . . . 3 балла

Задача 7.3.(6.3) Площадь поляны.

В рассказе Г. Остера персонажи пользуются четырьмя единицами измерения длины: удавами, попугаями, мартышками и слонятами. Известно, что в 1 удаве 38 попугаев, или 5 мартышек, или 2 слонёнка. Как-то раз Мартышка, Слонёнок и Попугай решили определить размеры прямоугольной поляны посреди джунглей. Длина одной стороны прямоугольника оказалась равна 150 попугаям, а другой — 8 мартышкам плюс 1 слонёнок. Определите площадь этой поляны в м^2, если 1 удав (в «человеческих» единицах) равен 3,8 м.

Ответ: 119,7 м^2.

Решение: Переведём все «звериные» единицы длины в «человеческие». Так как 1 удав = = 3,8 м, из условия задачи получим, что

$$1 \text{ попугай} = \frac{1}{38} \text{ удава} = 0{,}1 \text{ м}, \quad 1 \text{ мартышка} = \frac{1}{5} \text{ удава} = 0{,}76 \text{ м},$$

$$1 \text{ слонёнок} = \frac{1}{2} \text{ удава} = 1{,}9 \text{ м}.$$

Отсюда находим длины сторон прямоугольника поляны

$$a = 150 \text{ попугаев} = 15 \text{ м},$$

$$b = 8 \text{ мартышек} + 1 \text{ слонёнок} = 8 \cdot 0{,}76 \text{ м} + 1{,}9 \text{ м} = 7{,}98 \text{ м}$$

и вычисляем её площадь

$$S = ab = 15 \text{ м} \cdot 7{,}98 \text{ м} = 119{,}7 \text{ м}^2.$$

Критерии:

Перевод попугаев, мартышек и слонят в метры . . . . 3 балла
Вычисление длин сторон в метрах . . . . 4 балла
Нахождение площади . . . . 3 балла

Задача 7.4. Король едет в гости.

Король Чертополох со свитой движется из своего королевского замка в замок королевы Календулы со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает к Календуле гонцов, которые движутся со скоростью 25 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в замок королевы Календулы?

Ответ: 48 мин.

Решение: Гонцы удаляются от короля со скоростью $25-5 = 20$ км/ч. Следовательно, до момента отправки следующего гонца предыдущий успевает отъехать на расстояние 20 км/ч$\cdot$1 ч = = 20 км. Очевидно, это же расстояние будет разделять двух соседних гонцов, когда первый из них приедет в замок королевы. Отсюда находим, временной интервал между гонцами составляет

$$t = \frac{20 \text{ км}}{25 \text{ км/ч}} = \frac{4}{5} \text{ ч} = 48 \text{ мин}.$$

Критерии:

Найдено расстояние между гонцами) . . . . 6 баллов
Вычислен интервал между их прибытием . . . . 4 баллов

Максимально возможный балл в 5-6 классе 30
Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. На стройке.

Рабочий с помощью подвижного блока с коэффициентом полезного действия, равным 70%, равномерно поднимает груз массой 63 кг на десятый этаж строящегося дома. Найти силу, с которой рабочий тянет за верёвку, перекинутую через блок. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 450 Н.

Решение: Пусть h — высота, на которую поднимается груз, m — масса груза, F — сила, с которой рабочий тянет верёвку. Блок, который использует рабочий, является подвижным. Поэтому длина верёвки, вытягиваемой рабочим при подъёме груза равна $2h$. Запишем выражение для КПД

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} \cdot 100\% = \frac{mgh}{F \cdot 2h} \cdot 100\% = \frac{mg}{2F} \cdot 100\%.$$

Выразив отсюда F, получим

$$F = \frac{mg}{2\eta} \cdot 100\% = 450 \text{ Н}.$$

Критерии:

Связь между высотой подъёма груза и длиной вытянутой верёвки . . . . 3 балла
Выражение для КПД . . . . 4 балла
Найдена сила F . . . . 3 балла

Задача 8.2. Давление современного искусства.

Художник-авангардист Борис Тицианов создал инсталляцию для своей новой выставки — лежащий на большом постаменте полый куб, сделанный из квадратных стальных листов толщиной 2 мм. Определите давление, которое оказывает куб на постамент, если плотность стали равна 7,8 г/см^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг. Толщина стенок куба много меньше длины его ребра.

Ответ: 936 Па.

Решение: Пусть d — толщина листа, a — длина стороны квадратного листа. Масса одного стального листа равна $\rho_{\text{ст}}a^2d$. Поскольку для изготовления куба нужно 6 таких листов (по количеству граней), то общая масса куба равна $m = 6\rho_{\text{ст}}a^2d$. Отсюда находим давление, производимое кубом

$$p = \frac{mg}{a^2} = 6\rho_{\text{ст}}gd = 6 \cdot 7800 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 0{,}002 \text{ м} = 936 \text{ Па}.$$

Критерии:

Найдена масса одного листа . . . . 3 балла
Найдена масса всего куба . . . . 4 балла
Найдено давление куба . . . . 3 балла

Задача 8.3. Аквариум.

В аквариуме находится квадратная деревянная деталь, в центре которой сделано квадратное отверстие (см. рис. 8.1). В аквариум медленно наливают воду. Найдите высоту слоя воды, при которой деталь оторвётся ото дна. Указанный на рисунке размер a равен 5 см. Плотность дерева равна $\rho_{\text{д}} = 0{,}6$ г/см^3, плотность воды — $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3. Толщина детали везде одинакова.

Ответ: 9,5 см.

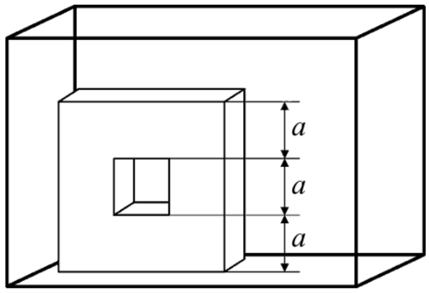

Рис. 8.1.

Решение: Пусть d — толщина детали. Её объём тогда равен $8a^2d$. Деталь оторвётся ото дна, когда величина силы Архимеда, действующей на её погруженную часть объёмом V, достигнет величины силы тяжести

$$F_А = F_т \quad \Rightarrow \quad \rho_в g V = \rho_д 8a^2 d g \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\rho_д 8a^2 d}{\rho_в} = 4{,}8a^2d.$$

Объём нижней части детали высотой a (до отверстия) равен $V_1 = 3a^2d$, объём части детали высотой $2a$ — $V_2 = 5a^2d$. Так как $V_1 < V < V_2$, искомая высота h погруженной части удовлетворяет условию $a < h < 2a$. Выразим объём погруженной части через геометрические размеры детали

$$V = 3a^2d + 2(h-a)ad = a^2d + 2had.$$

Отсюда

$$a^2d + 2had = 4{,}8a^2d \quad \Rightarrow \quad h = 1{,}9a = 9{,}5\text{ см}.$$

Критерии:

Объём детали . . . . 2 балла
Условие отрыва детали . . . . 2 балла
Объём погруженной части из условия отрыва . . . . 2 балла
Объём погруженной части через геометрические размеры . . . . 2 балла
Высота слоя воды . . . . 2 балла

Задача 8.4. На стадионе.

Восьмиклассники Дима и Паша пришли на стадион заниматься бегом. Оказалось, что Дима пробегает один круг по стадиону за $t_1 = 1{,}5$ мин. Если же Дима и Паша, стартуя с одного места, побегут по одной дорожке стадиона в разные стороны, то они встретятся через $t_2 = 50$ с. Определите время, за которое Паша пробегает один круг. Считать, что Дима и Паша бегают с постоянной скоростью.

Ответ: 112,5 с.

Решение: Пусть s — длина беговой дорожки стадиона (один круг), v_1 — скорость Димы, v_2 — скорость Паши, t — искомое время, за которое Паша пробегает один круг. Тогда $v_1 = s/t_1$, а $v_2 = s/t$. В случае, когда мальчики бегут навстречу друг другу

$$s = (v_1 + v_2)t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{t_2} = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t}.$$

Сокращая s и выражая отсюда t, получим

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 112{,}5\text{ с}.$$

Критерии:

Рассмотрен случай, когда бежит Дима . . . . 2 балла
Рассмотрен случай, когда бежит Паша . . . . 2 балла
Рассмотрен случай, когда бегут оба . . . . 2 балла
Найдено время Паши . . . . 4 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Поездка на автомобиле.

Расстояние между деревнями Аистово и Ведёркино равно 48 км. Автомобиль, выехавший из Аистово, первую часть пути ехал со скоростью v_1, а вторую часть — со скоростью v_2. По прибытии в Ведёркино выяснилось, что средняя скорость автомобиля на всём пути была вдвое больше v_2 и в 1,5 раза меньше v_1. Найдите длину первого и второго участков пути.

Ответ: 36 км и 12 км.

Решение: Пусть $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость автомобиля на всём пути, s — расстояние между деревнями, s_1 и s_2 — длины первого и второго участков. Тогда из условия задачи следует, что $v_1 = 1{,}5v_{\text{ср}}$, а $v_2 = 0{,}5v_{\text{ср}}$. Время всей поездки равно сумме времени, затраченного на первом и втором участках, поэтому

$$\frac{s}{v_{\text{ср}}} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{2s_1}{3v_{\text{ср}}} + \frac{2s_2}{v_{\text{ср}}} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{3}s_1 + 2s_2.$$

С другой стороны, $s = s_1 + s_2$. Отсюда получим, что

$$\frac{2}{3}s_1 + 2s_2 = s_1 + s_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 3s_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{3s}{4} = 36 \text{ км}, \quad s_2 = \frac{s}{4} = 12 \text{ км}.$$

Критерии:

Написана связь между v_1, v_2 и $v_{\text{ср}}$ . . . . 3 балла
Найдена связь между s_1 и s_2 . . . . 4 балла
Найдены значения s_1 и s_2 . . . . 3 балла

Задача 9.2. Эксперимент с калориметром.

В калориметр, в котором находится 100 г льда при температуре 0 ℃, впустили 5 г водяного пара, имеющего температуру 100 ℃. Сколько воды оказалось в калориметре после установления теплового равновесия? Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · ℃), удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды — 2,3 МДж/кг.

Ответ: 45 г.

Решение: Пусть $m_{\text{п}}$ — масса пара, m — масса превратившегося в воду льда. Теплота, выделяющаяся при конденсации и последующем остывании пара до 0 ℃, равна

$$Q_1 = Lm_{\text{п}} + c_{\text{в}}m_{\text{п}} \cdot 100\,^\circ\text{C} = 11500 \text{ Дж} + 2100 \text{ Дж} = 13600 \text{ Дж}.$$

Теплота, необходимая для плавления льда массы m равна $Q_2 = \lambda m$. Записывая уравнение теплового баланса, получим

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{13600 \text{ Дж}}{340000 \text{ Дж}} = 0{,}04 \text{ кг} = 40 \text{ г}.$$

Поскольку впущенный в калориметр пар тоже превратился в воду, общая масса воды в калориметре равна $m_{\text{п}} + m = 45$ г.

Критерии:

Найдено Q_1 и Q_2 . . . . 3 балла
Записано уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
Найдена масса растаявшего льда . . . . 2 балла
Найдена масса воды в калориметре . . . . 2 балла

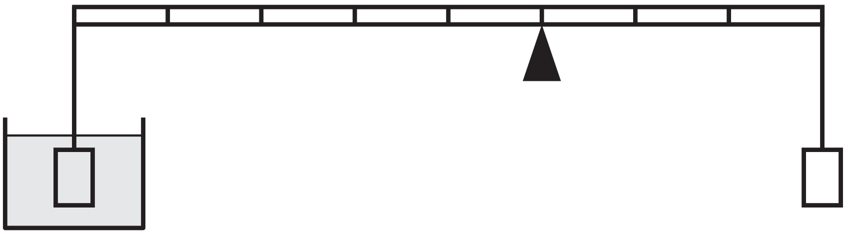

Рис. 9.1.

Задача 9.3. Плотность гири.
На концах однородного невесомого стержня уравновешены две гири равной массы, сделанные из одного и того же материала (см. рис. 9.1), одна из которых полностью погружена в воду. Определите плотность материала, из которого сделаны гири. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Для удобства на стержень нанесены штрихи, делящие его на восемь равных частей.

Ответ: 2500 кг/м^3.

Решение: Из условия равновесия рычага следует, что

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_1}{l_2},$$

где $P_1 = F_т - F_А$ — вес гири, погруженной в воду, $P_2 = F_т$ — вес второго гири, l_1 и l_2 — плечи этих сил. По рисунку $l_1/l_2 = 5/3$, поэтому

$$P_2 = \frac{5}{3}P_1 \quad \Rightarrow \quad F_т = \frac{5}{3}\left(F_т - F_А\right) \quad \Rightarrow \quad F_т = \frac{5}{2}F_А.$$

Подставляя сюда выражения для силы тяжести и силы Архимеда, получим (V — объём гири, ρ —плотность её материала)

$$\rho V g = \frac{5}{2}\rho_в V g \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{5}{2}\rho_в = 2500\ \frac{кг}{м^3}.$$

Критерии:

Записано условие равновесия рычага . . . . 2 балла
Записаны выражения для P_1 и P_2 . . . . 3 балла
Найдено отношение l_1/l_2 . . . . 2 балла
Найдена плотность гири . . . . 3 балла

Задача 9.4. Делитель напряжения.
В электрической цепи, изображённой на рис. 9.2, сопротивления резисторов указаны на рисунке, причём $R = 5$ Ом. Определите показания амперметра и вольтметра, если напряжение на входных клеммах $U_0 = 4{,}5$ В. Измерительные приборы можно считать идеальными.

Ответ: 0,18 А; 1,8 В.

Решение: Так как измерительные приборы являются идеальными, электрическая цепь, изображённая на рис. 9.2, представляет собой параллельно соединённые резисторы R и $2R$ с подсоединённым к ним последовательно резистором R. Общее сопротивление цепи равно

$$R_{общ} = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{5R}{3}.$$

Ток, текущий через левый резистор R, равен $I_0 = U_0/R_{общ} = 0{,}6U_0/R$. Отсюда получим, что напряжение, которое показывает вольтметр, равно

$$U = I_0 \cdot \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{0{,}6U_0}{R} \cdot \frac{2R}{3} = 0{,}4U_0 = 1{,}8\ В,$$

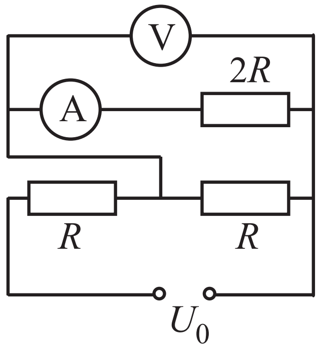

Рис. 9.2.

а сила тока, текущего через резистор $2R$ и амперметр —

$$I = \frac{U}{2R} = 0{,}18 \text{ А}.$$

Критерии:

Найдено общее сопротивление цепи . . . . 2 балла
Найден общий ток I_0 . . . . 2 балла
Найдено напряжение на вольметре . . . . 3 балла
Найден ток через амперметр . . . . 3 балла

Задача 9.5. Плавающий куб.

Полый алюминиевый куб с длиной ребра $a = 9$ см плавает на поверхности воды, погружаясь в неё на две трети своего объёма. Найдите объём полости внутри куба. Плотность алюминия равна 2700 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

Ответ: 549 см^3.

Решение: Объём куба равен $V = a^3 = 729$ см^3. Так как куб плавает, сила тяжести, действующая на него, равна силе Архимеда. Запишем условие плавания и найдём из него массу куба m

$$F_\text{т} = F_\text{А} \quad \Rightarrow \quad mg = \rho_\text{в} g \cdot \frac{2}{3} a^3 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{3}\rho_\text{в} a^3 = 486 \text{ г}.$$

Следовательно, объём стенок куба равен

$$V_\text{ст} = \frac{m}{\rho_\text{ал}} = 180 \text{ см}^3.$$

Отсюда находим объём полости внутри куба

$$V_\text{пол} = V - V_\text{ст} = 729 \text{ см}^3 - 180 \text{ см}^3 = 549 \text{ см}^3.$$

Критерии:

Найден объём куба . . . . 1 балл
Условие плавания . . . . 2 балла
Найдена масса куба . . . . 3 балла
Найден объём стенок . . . . 2 балла
Найден объём полости . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Фотоохота в Простоквашино.

Пёс Шарик отправился на фотоохоту. Во время привала мимо него неожиданно пробежал заяц с постоянной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через секунду Шарик кинулся вдогонку за зайцем с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Какое расстояние придётся пробежать Шарику, чтобы догнать зайца?

Ответ: 119,2 м.

Решение: Пусть Шарик догонит зайца через время t. За это время заяц успел убежать от места встречи с псом на расстояние $s = v_0(t + 1\text{ с})$. С другой стороны, $s = at^2/2$. Приравнивая правые части этих выражений, получим

$$v_0(t + 1\text{ с}) = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 - \frac{2v_0}{a}t - \frac{2v_0 \cdot 1\text{ с}}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 10\text{ с} \cdot t - 10\text{ с}^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$t = (5 + \sqrt{35})\text{ с} \approx 10{,}92\text{ с}$$

(второй корень — отрицательный и не имеет физического смысла). Расстояние, которое пробежал Шарик, чтобы догнать зайца, равно

$$s = v_0(t + 1\text{ с}) \approx 119{,}2\text{ м}.$$

Критерии:

Записано выражение для расстояния, пройденного зайцем . . . . 2 балла
Записано выражение для расстояния, пройденного Шариком . . . . 2 балла
Составлено уравнение . . . . 2 балла
Найдено решение уравнения . . . . 2 балла
Найдено расстояние, пройденное Шариком . . . . 2 балла

Задача 10.2. Электрическая цепь.

В электрической цепи, изображённой на рис. 10.1, напряжение на клеммах равно $U = 4{,}2$ В, а сопротивления резисторов — $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Найдите силу тока I_A, текущего через амперметр. Амперметр можно считать идеальным.

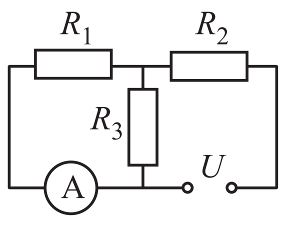

Рис. 10.1.

Ответ: $I_A = 0{,}3$ А.

Решение: Так как амперметр является идеальным, электрическая цепь, изображённая на рис. 10.1, представляет собой параллельно соединённые резисторы R_1 и R_3 с подсоединённым к ним последовательно резистором R_2. Общее сопротивление цепи равно

$$R_{\text{общ}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{56}{9}\text{ Ом}.$$

Ток, текущий через резистор R_2, равен $I_0 = U/R_{\text{общ}} = 0{,}675$ А. Отсюда получим, что напряжение на паре резисторов R_1 и R_3 равно

$$U_{13} = I_0 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 1{,}5\ \text{В},$$

а сила тока, текущего через резистор R_1 и амперметр —

$$I_\text{А} = \frac{U_{13}}{R_1} = 0{,}3\ \text{А}.$$

Критерии:

Найдено общее сопротивление цепи . . . . 2 балла
Найден общий ток I_0 . . . . 2 балла
Найдено напряжение на R_1 . . . . 3 балла
Найден ток через амперметр . . . . 3 балла

Задача 10.3. Атриум.

В крупном торговом центре эскалаторы, работающие на спуск и подъём, установлены в параллельных плоскостях (схема расположения эскалаторов изображена на рис. 10.2). Скорость движения ленты эскалаторов одинакова и равна v. Углы наклона эскалаторов к горизонту тоже одинаковы и равны α. Определите, с какой скоростью $v_{\text{отн}}$ движется пассажир, стоящий на одном эскалаторе относительно пассажира, стоящего на другом?

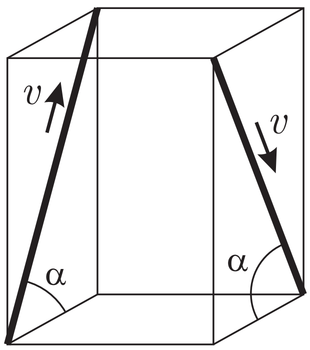

Рис. 10.2.

Ответ: $v_{\text{отн}} = 2v\sin\alpha$.

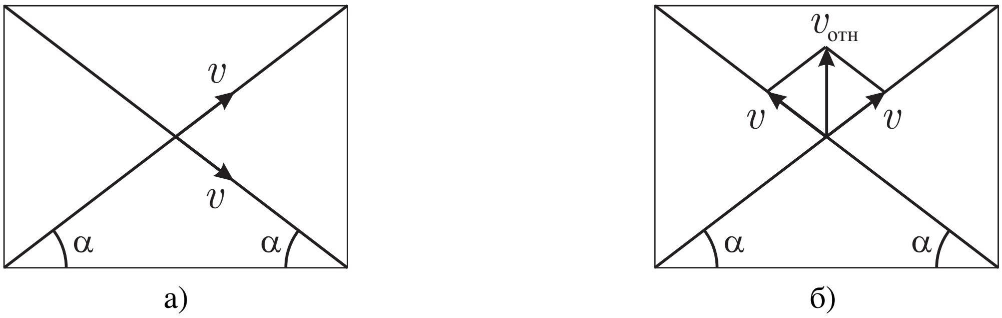

Рис. 10.3.

Решение: Для удобства наложим параллельные плоскости, в которых установлены эскалаторы, друг на друга. Нарисуем векторы скоростей пассажиров обоих эксалоторов исходящими из одной точки, например, так как показано на рис. 10.3а. Перейдём в систему отсчёта, связанную с одним из пассажиров. Тогда вектор относительной скорости будет равен разности векторов скорости пассажиров и направлен вдоль вертикальной прямой (см. рис. 10.3б). Величину $v_{\text{отн}}$ находим как длину диагонали ромба $v_{\text{отн}} = 2v\sin\alpha$.

Критерии:

Плоскости эскалаторов наложены друг на друга . . . . 2 балла
Изображён вектор относительной скорости . . . . 4 балла
Найдена величина относительной скорости . . . . 4 балла

Задача 10.4. Незнайка на луноходе.

Незнайка решил покататься на луноходе. Он повернул какую-то ручку и нажал на педаль. Машина начала набирать ход. Тогда Незнайка начал дёргать другие ручки. В результате скорость лунохода менялась так, как показано на графике (рис. 10.4). Найдите путь, пройденный луноходом за всё время движения, и его перемещение. Считать, что луноход всё время двигался вдоль одной прямой.

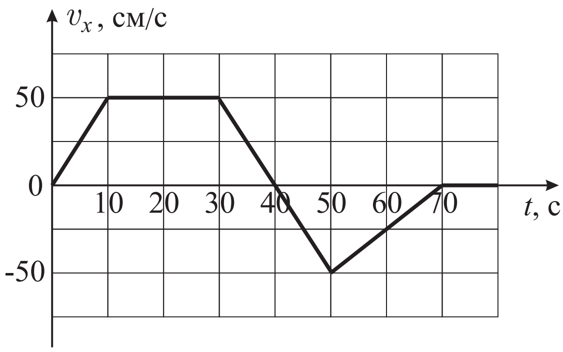

Рис. 10.4.

Ответ: 22,5 м; 7,5 м.

Решение: По графику луноход движется в течение 40 с вперёд, а затем 30 с назад. Чтобы найти расстояние s_1, пройденное луноходом за первые 40 с, вычислим площадь трапеции, образованной графиком скорости и осью времени (можно также найти пройденный путь, рассматривая равноускоренное, затем равномерное, затем равнозамедленное движения)

$$s_1 = \frac{1}{2}(40\text{ с} + 20\text{ с}) \cdot 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 15\text{ м}.$$

Аналогично находим расстояние s_2, пройденное луноходом в обратном направлении, как площадь треугольника, образованного графиком скорости и осью времени при $40\text{ с} \leqslant t \leqslant 70\text{ с}$

$$s_2 = \frac{1}{2}(70\text{ с} - 40\text{ с}) \cdot 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 7{,}5\text{ м}.$$

Путь, пройденный луноходом, равен $s_1 + s_2 = 22{,}5$ м, а его перемещение — $s_1 - s_2 = 7{,}5$ м.

Критерии:

Найдено расстояние, пройденное луноходом вперёд . . . . 3 балла
Найдено расстояние, пройденное луноходом назад . . . . 3 балла
Найден пройденный путь . . . . 2 балла
Найдено перемещение . . . . 2 балла

Задача 10.5. Поршень в сосуде.

Цилиндрический сосуд с площадью дна $S_1 = 100$ см^2 заполнен машинным маслом и закрыт поршнем. В поршне имеется отверстие, в которое вставлена длинная тонкостенная трубка. Масса поршня вместе с трубкой равна $m = 1{,}8$ кг, площадь поперечного сечения трубки — $S_2 = 20$ см^2. Первоначально поршень удерживают так, чтобы его нижняя поверхность касалась поверхности масла (см. рис. 10.5). Поршень отпускают. На какую высоту h относительно начального положения опустится поршень, когда прекратит своё движение вниз? Плотность масла равна $\rho_\text{м} = 900$ кг/м^3. Поршень очень плотно прилегает к стенкам сосуда. Трением пренебречь.

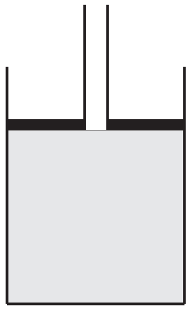

Рис. 10.5.

Ответ: $h = 6{,}25$ см.

Решение: Пусть поршень под собственной тяжестью опускается на высоту h, а масло выдавливается в трубку и поднимается на высоту H (рис. 10.6). Из-за того, что масло несжимаемо,

$$(S_1 - S_2)h = S_2 H \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S_2 H}{S_1 - S_2} = \frac{H}{4}.$$

Поршень оказывает давление на поверхность масла, равное $p_{\text{п}} = mg/(S_1 - S_2)$. С другой сто-

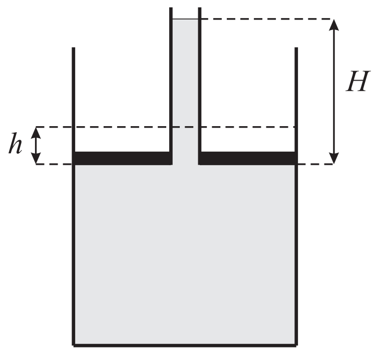

Рис. 10.6.

роны, давление столба масла в трубке равно $p_{\text{м}} = \rho_{\text{м}} g H$. В положении равновесия

$$p_{\text{м}} = p_{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{S_1 - S_2} = \rho_{\text{м}} g H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{m}{\rho_{\text{м}}(S_1 - S_2)} = 25 \text{ см}.$$

Отсюда находим, что $h = H/4 = 6{,}25$ м.

Критерии:

Найдена связь между h и H . . . . 2 балла
Записано выражение для давления поршня . . . . 2 балла
Записано выражение для давления масла в трубке . . . . 2 балла
Записано условие равновесия . . . . 2 балла
Найдена высота h . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. О высоте бросания.
Дальность полёта тела, брошенного в горизонтальном направлении со скоростью $v = 5$ м/с, в два раза меньше высоты бросания. С какой высоты h брошено тело? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 20 м.

Решение: Пусть t — время полёта тела, а L — дальность полёта. Тогда имеем

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad L = \frac{h}{2} = vt.$$

Выражая из второго равенства t и подставляя его в первое, получаем

$$h = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{2v}\right)^2 = \frac{gh^2}{8v^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{8v^2}{g} = 20 \text{ м}.$$

Критерии:
Записана связь между h и t . . . . 3 балла
Записана связь между L и t . . . . 3 балла
Найдена высота h . . . . 4 балла

Задача 11.2. Стержень на шарнире.
Тонкий однородный стержень массы m укреплён на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой к точке B (см. рис. 11.1). Стержень образует с горизонтальной поверхностью угол $\alpha = 45°$. Найдите величину и направление силы натяжения нити $\vec{T}$ и силы реакции шарнира $\vec{N}$.

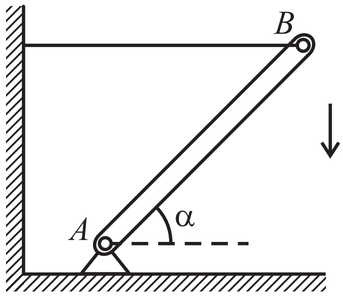

Рис. 11.1.

Ответ: Сила $\vec{T}$ направлена горизонтально к стенке, $T = mg/2$. Сила $\vec{N}$ направлена под углом $\beta = \operatorname{arctg} 2$ к горизонтали, $N = mg\sqrt{5}/2$.

Решение: Изобразим силы, действующие на стержень (рис. 11.2). Очевидно, что сила натяжения нити должна быть направлена вдоль неё влево. Пусть L — длина стержня. Запишем правило моментов относительно точки A

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha = TL\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{mg}{2}.$$

Поскольку $\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = 0$, в проекции на горизонтальную ось Ox и вертикальную Oy получим, что

$$\begin{cases} N_x - T = 0, \\ N_y - mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_x = mg/2, \\ N_y = mg. \end{cases}$$

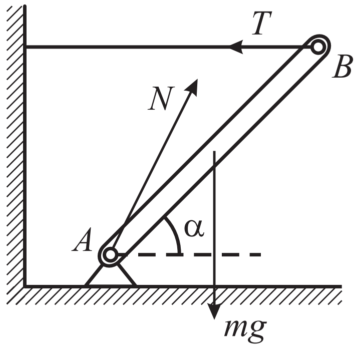

Рис. 11.2.

Это значит, что тангенс угла наклона вектора $\vec{N}$ к горизонтали равен двум, а величина силы реакции шарнира равна

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{mg\sqrt{5}}{2}.$$

Критерии:

Изображены силы, действующие на стержень . . . . . 2 балла
Указано направление силы T . . . . . 1 балл
Записано правило моментов . . . . . 3 балла
Найдена величина силы T . . . . . 1 балл
Найдены компоненты силы N . . . . . 2 балла
Найдена величина силы N . . . . . 1 балла

Задача 11.3. Погружение шара.

Тонкий резиновый шар, заполненный воздухом, погрузили в озеро на глубину 60 м. Во сколько раз при этом уменьшился его диаметр, если температура воздуха у поверхности воды равна 27 °C, а температура воды на глубине 60 м — лишь 7 °C? Атмосферное давление принять равным 100 кПа, ускорение свободного падения — 10 м/с^2. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Размерами шарика по сравнению с глубиной погружения можно пренебречь.

Ответ: примерно в 2 раза.

Решение: Пусть p_1 — атмосферное давление, V_1 — начальный объём шара, V_2 — объём шара на глубине. Давление p_2 на глубине $h = 60$ м равно

$$p_2 = p_1 + \rho_{\text{в}} g h = 700 \text{ кПа} = 7p_1.$$

Выразим теперь обе температуры в градусах Кельвина: $T_1 = 300$ К, $T_2 = 280$ К. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{7T_1}{T_2} \approx 7{,}5.$$

Отсюда находим отношение диаметров

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{7{,}5} = 1{,}957\ldots \approx 2.$$

Критерии:

Температуры переведены в кельвины . . . . . 1 балл
Найдено давление на глубине . . . . . 3 балла
Найдено отношение объёмов шара . . . . . 4 балла
Найдено отношение диаметров . . . . . 2 балла

Задача 11.4. Странные показания.
Если два последовательно соединённых резистора R_1 и R_2 подключены к клеммам источника тока (рис. 11.3а), напряжения на них равны, соответственно, $U_1 = 5$ В и $U_2 = 15$ В. Когда же к источнику подключили только первый резистор (рис. 11.3б), то напряжение на нём оказалось равно $U_1' = 18$ В. Найдите ЭДС $\mathscr{E}$ источника.

Рис. 11.3.

Ответ: 20,8 В.

Решение: Рассмотрим первый случай (рис. 11.3а). Так как напряжение на последовательно соединённых резисторах отличается в $U_2/U_1 = 3$ раза, то $R_2 = 3R_1$. Пусть $I_\text{а}$ — ток в цепи для первого случая. Запишем закон Ома для полной цепи

$$\mathscr{E} = I_\text{а}(4R_1 + r) \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E} = \frac{U_1}{R_1}\cdot(4R_1 + r) = 4U_1 + \frac{U_1 r}{R_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathscr{E}}{U_1} = 4 + \frac{r}{R_1}.$$

Ток во втором случае (рис. 11.3б) обозначим $I_\text{б}$ и также запишем закон Ома

$$\mathscr{E} = I_\text{б}(R_1 + r) \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E} = \frac{U_1'}{R_1}\cdot(R_1 + r) = U_1' + \frac{U_1' r}{R_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathscr{E}}{U_1'} = 1 + \frac{r}{R_1}.$$

Вычитая полученные равенства, выразим оттуда ЭДС источника

$$\frac{\mathscr{E}}{U_1} - \frac{\mathscr{E}}{U_1'} = 3 \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E} = \frac{3}{1/U_1 - 1/U_1'} \approx 20{,}8 \text{ В}.$$

Критерии:
Найдено соотношение между R_1 и R_2 . . . . 2 балла
Записан закон Ома для полной цепи для первого случая . . . . 3 балла
Записан закон Ома для полной цепи для второго случая . . . . 2 балла
Найдена ЭДС источника . . . . 3 балла

Задача 11.5. Длина тени.
Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту $h = 1$ м и отбрасывает тень длиной $L = 0{,}4$ м. Палку начинают медленно наклонять в направлении отбрасываемой ею тени так, что её нижний конец не сдвигается с места. Тень какой длины отбрасывает палка, наклонённая под углом 60° к площадке?

Ответ: 85 см.

Решение: Рассмотрим первый случай, когда палка стоит вертикально (рис. 11.4а). Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = L/h = 0{,}4$. Рассмотрим теперь второй случай, когда палка наклонена под углом 60° к площадке (рис. 11.4б). На рисунке

$$AD = h\sin 60^\circ = \frac{h\sqrt{3}}{2}, \quad CD = h\cos 60^\circ = \frac{h}{2}, \quad BD = AD\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4AD = \frac{h\sqrt{3}}{5}.$$

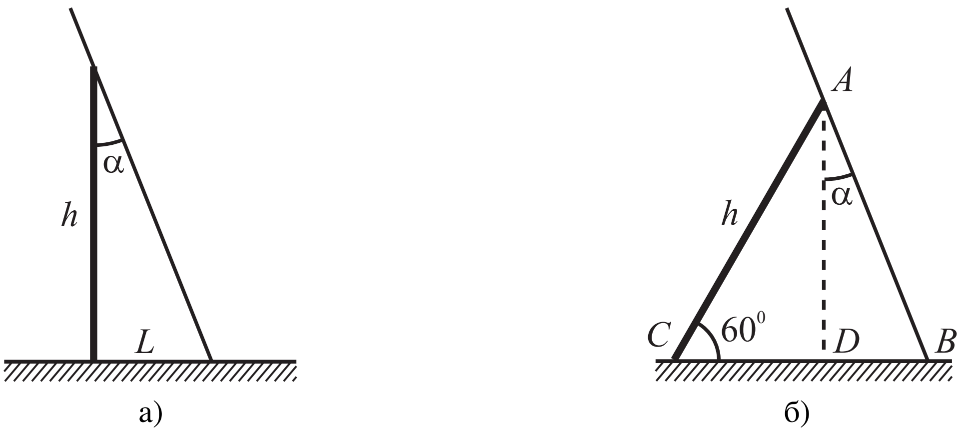

Рис. 11.4.

Отсюда находим длину CB тени от палки

$$CB = CD + BD = \frac{h}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{5} = h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \approx 0{,}85 \text{ м}.$$

Критерии:

Найден тангенс α или отношение L/h . . . . 2 балла
Найдены длины отрезков CD и BC . . . . 5 баллов
Найдена длина тени во втором случае . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50